Calcolare il seguente integrale indefinito

(a) $\int x^2 ln(x+1)dx = ?$

SOLUZIONE

Per risolvere l'integrale di partenza si utilizza il metodo di integrazione per parti

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

ponendo

$$u = ln(x+1) \Rightarrow u' = \frac{1}{x+1}$$
$$dv = x^2 \Rightarrow \int dv = \frac{x^3}{3}$$

applicando quindi il metodo di integrazione per parti

(b) $= \frac{x^3}{3} ln(x+1) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x+1} dx$

Per risolvere l'integrale che compare nella b) si esegue la divisione tra polinomi per poter trasformare la funzione integranda

x^3	+	0	+	0	+	0		$x+1$
$-x^3$	-	x^2						$x^2 - x + 1$
//	-	x^2						
	+	x^2	+	x				
		//	+	x				
			-	x	-	1		
					-	1		

Utilizzando la divisione tra polinomi la b) si può riscrivere nel seguente modo:

$$= \frac{x^3}{3} ln(x+1) - \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} ln(x+1) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - ln(x+1) \right] + c =$$

$$= \frac{x^3}{3} ln(x+1) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3} ln(x+1) + c$$