

Calcolare il seguente integrale indefinito

$$(a) \int \frac{x+3}{x^2-1} dx = ?$$

l'integrale (a) si può riscrivere come

$$(b) \int \left(\frac{x}{x^2-1} + \frac{3}{x^2-1} \right) dx = \int \frac{x}{x^2-1} dx + \int \frac{3}{x^2-1} dx =$$

$$(c) = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + \int \frac{3}{x^2-1} dx$$

scomponendo l'integrando della (c) con il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{3}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$Ax - A + Bx + B = 3$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = \frac{3}{2} \end{cases}$$

sostituendo il risultato nella (c)

$$== \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + \int \frac{-\frac{3}{2}}{x+1} dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{x-1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2-1| - \frac{3}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-1| + c =$$

$$= \ln \left(\frac{|x^2-1|^{\frac{1}{2}} |x-1|^{\frac{3}{2}}}{|x+1|^{\frac{3}{2}}} \right) + c == \ln \frac{(x-1)^2}{|x+1|} + c =$$